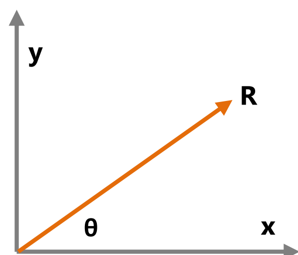
Kinematika Gerak Dengan Analisis Vektor

A. PENDAHULUAN

- **Dalam vektor** terdapat dua komponen utama, yaitu komponen horizontal (sumbu x) dan komponen vertikal (sumbu y).
- **Kedua komponen vektor** tersebut memiliki resultan yang memiliki arah yang merupakan akar dari jumlah kuadrat komponen x dan y.
- **Cara menentukan** komponen-komponen vektor:



$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta$$

$$R = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

B. POSISI DAN PERPINDAHAN PARTIKEL

- **Posisi (r)** merupakan kedudukan benda terhadap titik acuan.
- **Posisi** dapat dinyatakan dengan vektor-vektor satuan, pada sumbu x ditulis i, dan sumbu y ditulis j.

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{r} = \sqrt{x^2+y^2}$$

- **Perpindahan (Δr)** adalah perubahan posisi benda dalam waktu tertentu.
- **Perpindahan** dapat dirumuskan:

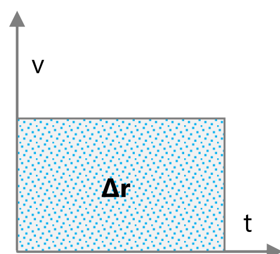
$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad \Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j}$$

$$\Delta\mathbf{r} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

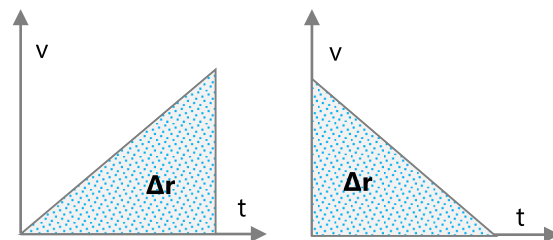
dengan arah perpindahan:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- **Grafik perpindahan** dalam berbagai macam gerak terhadap kecepatan dan waktu:



v konstan



v dipercepat v diperlambat

C. KECEPATAN PARTIKEL

- **Kecepatan rata-rata (v)** adalah hasil bagi perpindahan dengan waktu tempuhnya.

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad v = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} \qquad v = \sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}$$

dengan arah kecepatan:

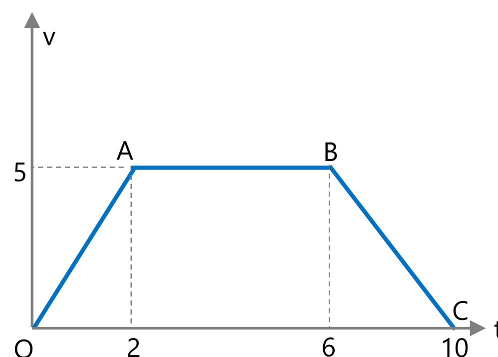
$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

- **Kecepatan sesaat** adalah kecepatan rata-rata untuk Δt mendekati nol.

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{v}$$

- **Kecepatan sesaat** dengan pendekatan grafik:

Contoh:



Untuk 0 ≤ t ≤ 2 (garis OA):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_0}{t_A - t_0}$$

Untuk 2 ≤ t ≤ 6 (garis AB):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

Untuk 6 ≤ t ≤ 10 (garis BC):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_C - x_B}{t_C - t_B}$$

- **Kecepatan sesaat** merupakan turunan pertama fungsi posisi.

$$v = r' = \frac{dr}{dt}$$

Turunan sederhana:
$r = x^n$
$r' = n.x^{n-1}$



Contoh:

Tentukan fungsi kecepatan sesaat dari fungsi r = $4r^2 + 5r + 1$!

Jawab:

$r' = 2.4.r^{(2-1)} + 1.5.r^{(1-1)} + 0.1$

$v = 8r + 5$ m/s

- **Posisi partikel** dapat ditentukan menggunakan integral dari fungsi kecepatan.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x.dt \qquad \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t v_y.dt$$

$$x - x_0 = \int_0^t v_x.dt \qquad y - y_0 = \int_0^t v_y.dt$$

$$\mathbf{x = x_0 + \int_0^t v_x.dt} \qquad \mathbf{y = y_0 + \int_0^t v_y.dt}$$

lalu dapat dicari resultannya, atau:

$$\mathbf{r = r_0 + \int_0^t v.dt}$$

D. PERCEPATAN PARTIKEL

- **Percepatan rata-rata (a)** adalah perubahan kecepatan dalam waktu tertentu.

$$\mathbf{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \mathbf{a = a_x\,i + a_y\,j} \qquad \mathbf{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

dengan arah percepatan:

$$\mathbf{\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}}$$

- **Percepatan sesaat** adalah kecepatan rata-rata untuk Δt mendekati nol.

$$\mathbf{a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}}$$

- **Percepatan sesaat** merupakan turunan pertama fungsi kecepatan dan turunan kedua fungsi posisi.

$$\mathbf{a = r'' = \frac{dv}{dt} = \frac{dr'}{dt}}$$

Turunan sederhana:
$r = x^n$
$r'' = n(n-1).x^{n-2}$

Contoh:

Tentukan fungsi kecepatan dan percepatan dari fungsi r = $2r^2 + 3r - 5$!

Jawab:

$r' = 2.2.r^{(2-1)} + 1.3.r^{(1-1)} + 0.1$

$v = 4r + 3$ m/s

$r'' = 1.4^{(1-1)} + 0.3$

$a = 4$ m/s^2

- **Kecepatan** dapat ditentukan menggunakan integral dari fungsi percepatan.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{x_0}^{x} dv = \int_0^t a.dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t a.dt$$

$$\mathbf{v = v_0 + \int_0^t a.dt}$$

lalu dapat dicari resultannya.

E. GERAK LURUS DAN GERAK MELINGKAR

- **Gerak lurus** adalah gerak yang dipengaruhi oleh kecepatan linear, sedangkan **gerak melingkar** dipengaruhi oleh kecepatan sudut.
- **Gerak lurus berubah beraturan** (GLBB) adalah gerak yang dipengaruhi oleh kecepatan linear dan percepatan linear konstan, sedangkan **gerak melingkar berubah beraturan** (GMBB) dipengaruhi oleh kecepatan sudut dan percepatan sudut konstan.
- **Hubungan** gerak lurus (translasi/linear) dengan gerak melingkar (rotasi):

Besaran	Linear	Rotasi	Hub.
Perpindahan	r (m)	θ (rad)	r = θ.R
Kecepatan	v (m/s)	ω (rad/s)	v = ω.R
Percepatan	a (m/s^2)	α (rad/s^2)	a = α.R

- **Hubungan** GLBB dengan GMBB:

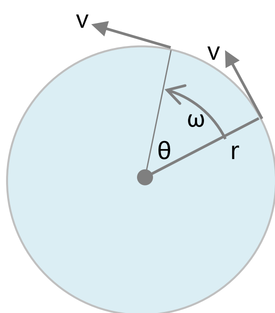
GLBB	GMBB
$v = v_0 + a.t$	$\omega = \omega_0 + a.t$
$s = v_0.t + {}^1/_2 a.t^2$	$\theta = \omega_0.t + ½\alpha.t^2$
$v_t^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega_t^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$

- **Hubungan** GLBB dengan GMBB dengan analisis vektor:

GLBB	GMBB
$v = \frac{dr}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
$r = r_0 + \int_0^t r.dt$	$\theta = \theta_0 + \int_0^t \theta.dt$
$v = v_0 + \int_0^t a.dt$	$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha.dt$

- **Gerak melingkar berubah beraturan** dipengaruhi oleh:
  a. Kecepatan linear
  b. Kecepatan angular/sudut
  c. Percepatan tangensial/linear
  d. Percepatan sentripetal





Kecepatan linear pada GMBB arahnya menuju arah gerak benda (lurus) yaitu menyinggung lintasan gerakan, dimana lintasannya berupa busur/keliling lingkaran.

dapat dirumuskan:

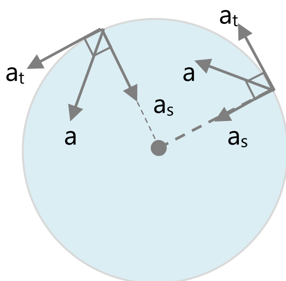
$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v = \frac{2\pi r}{T}$	$v = 2\pi r f$

r = jari-jari lingkaran (m)
T = periode (s)
f = frekuensi (1/s)

Kecepatan angular/sudut pada GMBB arahnya menuju arah putaran benda (melingkar) yaitu berupa perubahan besar sudut busur lingkaran.

dapat dirumuskan:

$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = 2\pi f$



Percepatan tangensial/linear pada GMBB:

a. Arahnya searah dengan garis singgung lingkaran.
b. Arahnya sejajar dengan kecepatan linear.
c. Arahnya tegak lurus dengan percepatan sentripetal.
d. Mengubah besar kecepatan total benda.

dapat dirumuskan:

$a_t = \alpha . r$	$a_t = \frac{dv}{dt}$

Percepatan sentripetal pada GMBB:

a. Arahnya menuju pusat lingkaran.
b. Arahnya tegak lurus dengan percepatan tangensial.
c. Mengubah arah kecepatan total benda (menuju pusat).

dapat dirumuskan:

$a_s = \frac{v^2}{r}$	$a_s = \omega^2 . r$

menghasilkan gaya sentripetal:

$F_s = \frac{mv^2}{r}$	$F_s = m.\omega^2.r$

Percepatan total adalah perpaduan antara percepatan tangensial dan percepatan sentripetal, dapat dirumuskan:

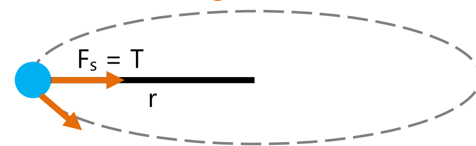
$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_s}^2}$$

dengan arah percepatan total:

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_s}$$

Beberapa contoh gerak melingkar:

G.M. horizontal dengan tali



Gaya sentripetal pada gerak ini berupa tegangan tali yang menahan benda agar tetap berada pada lintasannya.

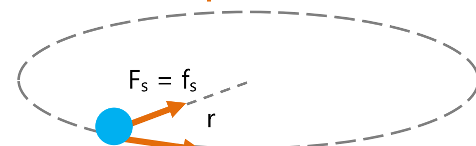
Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$F_s = T$	$T = \frac{mv^2}{r}$

Kecepatan maksimum agar tali tidak putus:

$$v_{maks} = \sqrt{\frac{T_{maks}.r}{m}}$$

G.M. horizontal tanpa tali



Gaya sentripetal pada gerak ini berupa gaya gesek statis yang menahan benda agar tidak tergelincir sewaktu berputar.

Persamaan umum yang dapat dibentuk:

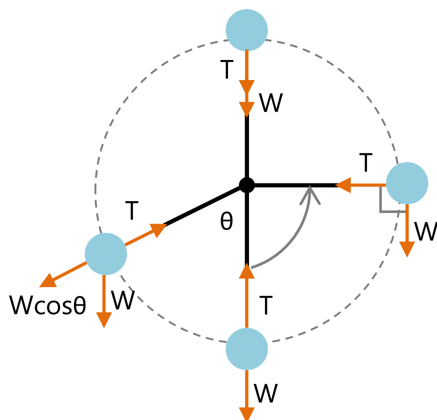
$F_s = f_s$	$\frac{mv^2}{r} = \mu_s.N$

Kecepatan maksimum agar benda tidak meninggalkan lintasan:

$$V_{maks} = \sqrt{\mu_s.g.r}$$



G.M. vertikal dengan tali



Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$T \pm W\cos\theta = F_s$$

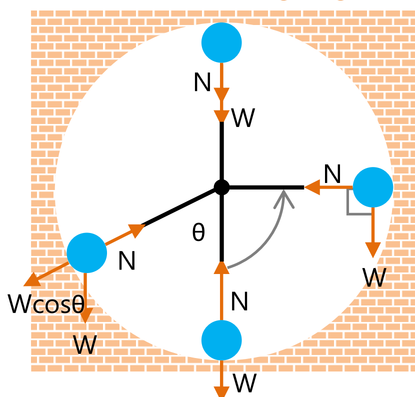
Kecepatan minimum yang dibutuhkan agar benda dapat mencapai titik B dari A adalah:

$$v_{min} = \sqrt{2.g.r}$$

Kecepatan minimum yang dibutuhkan agar benda berputar satu lingkaran penuh:

$$v_{min} = \sqrt{5.g.r}$$

G.M. vertikal di dalam bidang lingkaran



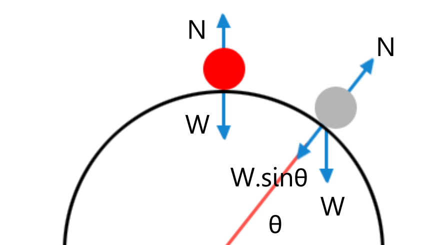
Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$N \pm W\cos\theta = F_s$$

Kecepatan minimum pada C agar benda tidak meninggalkan lintasan:

$$V_{min} = \sqrt{g.r}$$

G.M. vertikal di luar bidang lingkaran



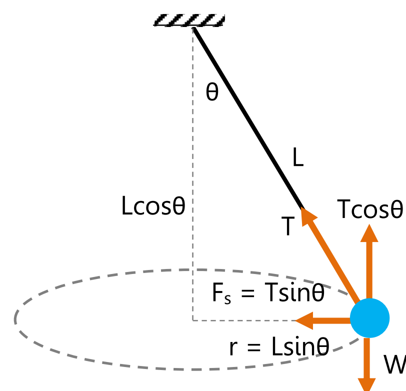
Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$N - W\sin\theta = -F_s$$

Kecepatan minimum agar benda tidak meninggalkan lintasan:

$$V_{maks} = \sqrt{g.r}$$

Ayunan konis



Persamaan umum yang dapat dibentuk:

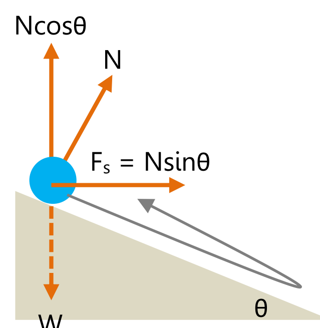
$$W = T\cos\theta \qquad F_s = T\sin\theta$$

$$T = \sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

Kecepatan maksimum agar tali tidak putus:

$$V_{maks} = \sqrt{g.r.\tan\theta}$$

G.M. pada bidang miring atau velodrom



Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad F_s = mg\tan\theta$$

Kecepatan maksimum agar benda tidak meninggalkan lintasan dapat dirumuskan:

$$v_{maks} = \sqrt{g.r.\tan\theta} \qquad v_{maks} = \sqrt{\mu_s.g.r}$$

